INSTITUTO TECNOLÓGICO AUTÓNOMO DE MÉXICO
Cálculo Diferencial e Integral II

Laboratorio 2: Integral de Riemann y sus propiedades

1. Demuestre que: $\dfrac{1}{3} \leq \displaystyle\int_4^6 \frac{1}{x}\,dx \leq \frac{1}{2}$.

2. A partir de las desigualdades

$$1 - \frac{1}{2}x^2 \leq \cos(x) \leq 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4, \quad \text{para} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

obtén cotas superior e inferior para $\displaystyle\int_0^1 \cos(\sqrt{x})\,dx$.

3. Prueba la siguiente desigualdad para $f(x) = \sqrt{1 + x^2 + x^4}$,

$$2 \leq \int_{-1}^{1} f(x)\,dx \leq 2\sqrt{3}\,.$$

4. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas ($a < b$) tales que $\displaystyle\int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\,dx = 0$. Prueba que existe $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = g(c)$.

5. Determina la ecuación de la recta tangente a

$$f(x) = \int_{\pi/2}^{x} x\,\frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt.$$

en $x = \dfrac{\pi}{2}$. Utiliza este resultado para estimar el valor de $f\left(\dfrac{\pi}{2} + 0.1\right)$.

6. Determina una función continua $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ y una constante $a \in \mathbb{R}^+$ tales que

$$27 + \int_a^x \frac{f(t)}{t}\,dt = 3x^{1/2}, \quad \forall x > 0.$$

7. Justifica si las siguientes funciones son diferenciables y calcula su derivada. Reducir el resultado:

a) $F(x) = \displaystyle\int_x^1 \sqrt{1 + t^4}\,dt.$

b) $F(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \sqrt{1 + s^4}\,ds\right)^2$

c) $F(x) = \displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1 + t^4}\,dt.$

d) $F(x) = \displaystyle\int_{-2x}^{2x} \sqrt{1 + t^4}\,dt.$

Cazuelazo semanal.

Verifica rigurosamente que:

1. Si f es una función lineal en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, entonces se satisface la identidad

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(b) + f(a)}{2}\,(b - a)\ .$$

2. Si f es una función cuadrática en el intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, entonces se satisface la identidad

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)}{6}\,(b - a).$$

Hint: Divide y vencerás, utiliza las propiedades que conoces para separar en integrales más sencillas.

Breviario cultural: Si $f(x)$ es cúbica, el resultado continúa siendo válido.